TD9

RÉDUCTION DES MATRICES

Exercice 1 **ECRICOME** 2013.

On désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 3 à coefficients réels et par O_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -9 & 6 \end{pmatrix}$, $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, ainsi que le polynôme R défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$R(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3.$$

Pour tout réel λ, on pose $X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$.

Pour finir, on introduit l'application f définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(M) = AM + MA$.

1. Montrer que R' (la dérivée de R) admet deux racines réelles distinctes r_1, r_2 avec $r_1 < r_2$ que l'on précisera.
2. Dresser le tableau de variations de R en y ajoutant les valeurs de R en r_1 et r_2 .
3. Justifier que R admet trois racines a, b, c avec $0 < a < r_1 < b < r_2 < c$.
   On ne cherchera pas à calculer ces racines.
4. Soit λ un réel, calculer AX_λ puis démontrer que X_λ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ si et seulement si $R(\lambda) = 0$.
5. Établir l'existence d'une matrice inversible P et d'une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
   Expliciter les matrices P et D en fonction des réels a, b, c.
6. Prouver que f est une application linéaire et que : $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(M) = O_3 \iff DM' + M'D = O_3$
   où l'on a posé $M' = P^{-1}MP$.
7. Soit $N = \begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{pmatrix}$. Déterminer les neuf coefficients de la matrice $DN + ND$.
   Que dire de N si $DN + ND = O_3$?
8. Démontrer que f est un isomorphisme.

Exercice 2 **EMLyon** 2015, un peu plus dur.

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On note 0_E le vecteur nul de E.
On note i l'application identité de E, et θ l'application constante nulle de E dans E : $i : E \longrightarrow E, x \longmapsto x$

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

et $\theta : E \longrightarrow E, x \longmapsto 0_E$.
On considère un endomorphisme f de E tel que :

$$f \neq \theta, f^2 + i \neq \theta, f \circ (f^2 + i) = \theta$$

où f^2 désigne $f \circ f$.

1. **a.** Montrer que f n'est pas bijectif.
   b. En déduire que 0 est valeur propre de f, puis montrer qu'il existe u appartenant à E tel que : $u \neq 0_E$ et $f(u) = 0_E$.

Soit v_1 appartenant à E tel que : $v_1 \neq 0_E$ et $f(v_1) = 0_E$.

2. Montrer : $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$.
3. Est-ce que f est diagonalisable ?
4. Montrer que $f^2 + i$ n'est pas bijectif, puis en déduire qu'il existe v appartenant à E tel que : $v \neq 0_E$ et $f^2(v) = -v$.

Soit v_2 appartenant à E tel que : $v_2 \neq 0_E$ et $f^2(v_2) = -v_2$. On note $v_3 = f(v_2)$.

5. Montrer : $f(v_3) = -v_2$.
6. **a.** Montrer que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E.
   b. Déterminer la matrice C de f dans la base $\mathcal{B}$.

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et le sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par (A, B, C), c'est-à-dire :

$$\mathcal{F} = \{aA + bB + cC ; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}.$$

7. Déterminer la dimension de $\mathcal{F}$.
8. Montrer : $\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) ; CM = MC\} = \mathcal{F}$
9. **a.** Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, calculer la matrice $(aA + bB + cC)^2$.
   b. En déduire une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}$.
10. On note $g = f^2 - i$.
    Montrer que g est bijectif et exprimer g^{-1} à l'aide de f et de i.

Exercice 3 **ECRICOME** 2016.

Partie A. Pour tout couple de réels (x, y), on définit la matrice $M(x, y)$ par :

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x + 2y & 2x - y \\ -x - y & 4x - 3y & -2x + y \\ -2y & 4x - 4y & -x + y \end{pmatrix}$$

On appelle E l'ensemble des matrices $M(x, y)$ où x et y décrivent $\mathbb{R}$:

$$E = \left\{ M(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

On note $A = M(1, 0)$ et $B = M(0, 1)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En déterminer une base et donner sa dimension.
2. Montrer que 1, 2 et 3 sont valeurs propres de A et déterminer les espaces propres associés. A est-elle diagonalisable ?

3. Déterminer une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont la première ligne est $\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\end{pmatrix}$, et telle que :
$$A = PD_AP^{-1} \qquad \text{où} \qquad D_A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$
4. Déterminer P^{-1} (faire figurer le détail des calculs sur la copie).
5. En notant X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs colonnes formant la matrice P, calculer BX_1, BX_2 et BX_3.
En déduire l'existence d'une matrice diagonale D_B que l'on explicitera telle que :
$$B = PD_BP^{-1}.$$
6. En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe une matrice diagonale $D(x, y)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :
$$M(x, y) = PD(x, y)P^{-1}.$$
7. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (x, y) pour que $M(x, y)$ soit inversible.
8. Montrer que B^2 est un élément de E. La matrice A^2 est-elle aussi un élément de E ?

Partie B. On souhaite dans cette partie étudier les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les conditions initiales $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$ et les relations de récurrence suivantes :
$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 4b_n - c_n \\ b_{n+1} = -4a_n - 5b_n + c_n \\ c_{n+1} = -6a_n - 8b_n + 2c_n \end{cases}$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}$.

9. Que vaut X_0 ?
10. Déterminer une matrice C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :
$$X_{n+1} = CX_n.$$
Déterminer ensuite deux réels x et y tels que $C = M(x, y)$.
11. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C^nX_0$.
12. À l'aide des résultats de la partie A, exprimer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Exercice 4 **ECRICOME** 2007.

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrés d'ordre 2 à coefficients réels. La matrice A suivante étant donnée :
$$A = \begin{pmatrix}3 & -1\\6 & -2\end{pmatrix}$$
on définit l'application ϕ_A par
$$\phi_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{array}.$$

Partie I : Diagonalisation de A.

1. Vérifier que $A^2 = A$. En déduire les valeurs propres possibles de A.
2. Prouver que la matrice A est diagonalisable et déterminer une matrice P inversible de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont la première colonne est nulle vérifiant la relation
$$A = PDP^{-1}.$$
Donner l'écriture matricielle de P^{-1}.

Partie II : Diagonalisation de ϕ_A.

3. Montrer que ϕ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4. Établir que $X^3 - X$ est un polynôme annulateur de ϕ_A.
En déduire les valeurs propres de ϕ_A.

5. Montrer que M est un vecteur propre de ϕ_A associé à la valeur propre λ si et seulement si la matrice $N = P^{-1}MP$ est non nulle et vérifie l'équation matricielle $DN - ND = \lambda N$.

6. On pose $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

- **a.** Trouver l'ensemble des matrices N telles que $DN - ND = 0$.
- **b.** En déduire que la famille (A, M_1) avec $M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ est une base du sous-espace propre $\mathrm{Ker}(\phi_A)$ associé à la valeur propre 0.
- **c.** Déterminer les deux valeurs propres λ_1 et λ_2 de ϕ_A et caractériser les matrices N associées.
- **d.** En déduire une base de chaque sous-espace propre $E_{\lambda_1}(\phi_A)$ et $E_{\lambda_2}(\phi_A)$ associé aux valeurs propres λ_1 et λ_2.

7. L'endomorphisme ϕ_A est-il diagonalisable [1]

1. Cette terminologie a disparu du programme. On veut en fait montrer que la matrice de ϕ_A dans la base canonique est diagonalisable, ou encore qu'il existe une base de vecteurs propres pour ϕ_A. La notion de vecteur propre pour un endomorphisme a elle-aussi disparu du programme mais elle reste évidente.